Erzwungene Schwingung, Dämpfung und Resonanz

Wo kommt die Differentialgleichung her?

Eine harmonische Schwingung wird erzeugt durch eine Kraft $-kx$ (Federkonstante $k > 0$, Auslenkung x), woraus mit dem Newtonschen Gesetz die DGL $m\ddot{x} = -kx$ folgt. Wir betrachten zusätzlich eine Reibungs-/Dämpfungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}$ und der Geschwindigkeit entgegengerichtet sein soll, also $-c\dot{x}$ mit einer Konstanten $c > 0$. Somit folgt

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}.$$

Außerdem wollen wir nun noch eine äußere Kraft betrachten, die die Schwingung antreibt. Als Beispiel untersuchen wir das Schwingungsverhalten unseres Systems unter einer äußeren Kraft der Form $Fe^{i\Omega t}$ (mit Realteil $F\cos\Omega t$ und der Einfachheit halber $F, \Omega > 0$). Ein Beispiel wäre ein Federpendel mit einer geladenen Kugel, an das ein zeitlich mit der Frequenz Ω oszillierendes, räumlich homogenes elektrisches Feld angelegt wird. Alles in Allem haben wir somit

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + Fe^{i\Omega t} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{i\Omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = fe^{i\Omega t}.$$

Im letzten Schritt wurde die Gleichung durch m dividiert und neue Konstanten $\omega_0^2 \coloneqq k/m$, $\gamma \coloneqq c/2m$ und $f \coloneqq F/m$ eingeführt, die die Notation vereinfachen. Die Differentialgleichung ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung.

Homogene Lösung

Die Gesamtlösung der DGL ist die Summe aus der homogenen Lösung x_h und der partikulären Lösung x_p.

Nach dem Standardrezept für solche DGLs bestimmen wir zunächst die homogene Lösung mit dem Standardansatz $x_h \sim e^{\lambda t}$. Einsetzen in die *homogene* DGL (d. h. ohne den Term $fe^{i\Omega t}$) ergibt

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \quad \overset{e^{\lambda t}\neq 0 \forall t}{\Leftrightarrow} \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{=:W}.$$

Die homogene Lösung hat somit die Form

$$x_h = e^{-\gamma t}(Ae^{iWt} + Be^{-iWt}).$$

Aus $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ folgt, dass $\operatorname{Re} e^{\pm iWt}$ und $\operatorname{Im} e^{\pm iWt} \in [-1, 1]$ sind. Für $t \to \infty$ geht x_h wegen dem $e^{-\gamma t}$-Faktor also gegen null. Wenn man nur lange genug wartet, verschwindet also die homogene Lösung und es genügt dann, *nur noch* die partikuläre Lösung zu betrachten; dies wollen wir im Folgenden tun (d. h. wir betrachten nur Zeiten t, die so groß sind, dass $x_h \approx 0$).

Partikuläre Lösung

Der Standardansatz für eine partikuläre Lösung bei einer Inhomogenität $fe^{i\Omega t}$ ist $x_p = Ce^{i\Omega t}$. Einsetzen in die gesamte DGL ergibt

$$-\Omega^2 Ce^{i\Omega t} + 2\gamma i\Omega Ce^{i\Omega t} + \omega_0^2 Ce^{i\Omega t} = fe^{i\Omega t} \quad \overset{e^{i\Omega t}\neq 0 \forall t}{\Leftrightarrow} \quad C(-\Omega^2 + 2\gamma i\Omega + \omega_0^2) = f$$

$$\Leftrightarrow \quad C = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\gamma i\Omega} = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\gamma i\Omega}\underbrace{\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma i\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma i\Omega}}_{=1} = f\,\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma i\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}.$$

Unsere Lösung hat also die Form

$$x_p = f\,\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma i\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}\,e^{i\Omega t}.$$

Um die physikalische Lösung zu analysieren, könnten wir nun den Realteil hiervon berechnen. Es geht aber weitaus geschickter: Wir können unser C – wie jede komplexe Zahl – als $C = |C|e^{i\varphi}$ schreiben, wobei φ natürlicherweise von C abhängt. Dann bekommen wir

$$x_p = |C|e^{i\Omega t + i\varphi}.$$

Da $|C|$ (und φ) natürlich reell ist, können wir hiervon sehr viel einfacher den Realteil bilden: Wir sehen sofort, dass $|C|$ die Amplitude der Schwingung ist und φ die Phasenverschiebung zwischen Schwingung und Antrieb.

Natürlich müssen wir Betrag $|C|$ und Phase φ nun auch noch ausrechnen. Kümmern wir uns als erstes um den Betrag.

Betrag von C

ALLGEMEINE FORM:

Den Betrag einer komplexen Zahl erhält man über $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\, z + \mathrm{Im}^2\, z}$. Also folgt

$$|C| = f\left|\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma i\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}\right| = f\,\frac{|\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\gamma i\Omega|}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = f\,\frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (-2\gamma\Omega)^2}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

RESONANZFALL:

Die Resonanzfrequenz ist diejenige Frequenz Ω, zu der sich die maximale Auslenkung x_p bzw. Amplitude $|C|$ erzielen lässt. Ein Maximum berechnet man über die Ableitung:

$$\frac{\partial|C|}{\partial\Omega} = -\frac{1}{2}\frac{f}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2)^{3/2}}(-4(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 8\gamma^2\Omega) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad -4(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 8\gamma^2\Omega \overset{!}{=} 0 \qquad \overset{\Omega\neq 0}{\Leftrightarrow} \qquad \Omega \overset{!}{=} \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} =: \Omega_r.$$

Man beachte, dass die Resonanzfrequenz nur für eine verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ der Eigenfrequenz ω_0 entspricht; in diesem Fall divergiert die Amplitude $|C(\Omega)|$ für $\Omega \to \Omega_r = \omega_0$. Für endliche Dämpfungen hingegen divergiert die Amplitude nicht, sie hat ein endliches Maximum.

Man beachte außerdem, dass es dieses Maximum für starke Dämpfungen $2\gamma^2 > \omega_0^2$ nicht gibt, da die Wurzel hier imaginär wird; in diesem Fall bleibt als einziges Maximum $\Omega = 0$ übrig.

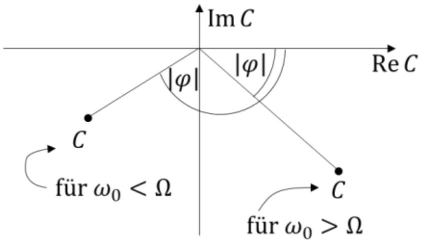
Phase von C

ALLGEMEINE FORM:

Nun zur Phase: Wir nehmen an, dass $\omega_0, \Omega > 0$ sind. Da auch $\gamma > 0$ ist, folgt offensichtlich $\mathrm{Im}\, C < 0$ und

$$\mathrm{Re}\, C > 0 \quad \text{für} \quad \omega_0 > \Omega \qquad \text{sowie} \qquad \mathrm{Re}\, C < 0 \quad \text{für} \quad \omega_0 < \Omega.$$

Für den Fall $\omega_0 > \Omega$ befindet sich C im vierten Quadranten der komplexen Ebene, φ ist der Winkel zur Realteilachse, der also von der Realteilachse nach unten geht.[1] Solch ein φ sei *negativ*.



[1] Unsere Schreibweise von C als $|C|e^{i\varphi}$ entspricht genaugenommen *nicht* der Polardarstellung von komplexen Zahlen, da dort das Argument φ per Definition auf $\varphi \in [0, 2\pi)$ beschränkt ist. Wir hingegen verstehen φ aber als Phasenverschiebung bzgl. der antreibenden Kraft; die partikuläre Lösung lautet

$$x_p = Ce^{i\Omega t} = |C|e^{i(\Omega t + \varphi)}.$$

Die Auslenkung des Systems gemäß der partikulären Lösung ist also um φ bzgl. der externen Kraft $Fe^{i\Omega t}$ *phasenverschoben*. Physikalisch ist klar, dass Auslenkung der antreibenden Kraft nicht vorrauseilen kann, sondern nur hinterherhinken. Somit ist klar, dass die Phasenverschiebung φ negativ sein muss.

Somit folgt

$$\omega_0 > \Omega \quad \Longrightarrow \quad \varphi = -\arctan\frac{|\mathrm{Im}\, C|}{|\mathrm{Re}\, C|} = -\arctan\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Für den Fall $\omega_0 < \Omega$ befindet sich C im dritten Quadranten der komplexen Ebene. Somit gilt

$$\omega_0 < \Omega \quad \Longrightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{|\mathrm{Re}\, C|}{|\mathrm{Im}\, C|} = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\Omega}.$$

RESONANZFALL:

Für den Resonanzfall haben wir oben gesehen, dass $\Omega = \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0$ gilt. Setzen wir dieses Ω in die obige Formel für φ im Fall $\omega_0 > \Omega$ ein, erhalten wir

$$\varphi = -\arctan\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}{\gamma}.$$

Für eine verschwindende Dämpfung $\gamma \to 0$ folgt somit $\varphi \to -\arctan\infty = -\pi/2$.

GRENZFÄLLE JENSEITS DES RESONANZFALLS:

Solange $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ ist, gibt es einen Resonanzpeak, da dann $\Omega_r \in \mathbb{R}$. Was passiert in diesem Fall für die Grenzfälle der Anregungsfrequenz $\Omega \to 0$ und $\Omega \to \infty$?

$$\Omega \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega < \omega_0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = -\arctan\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \to -\arctan 0 = 0,$$

$$\Omega \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \Omega > \omega_0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\Omega} \to -\frac{\pi}{2} - \arctan\infty = -\pi.$$

Für sehr kleine Anregungsfrequenzen schwingt das System also mit der Anregung in Phase, für sehr große Anregungsfrequenzen gegenphasig.